Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

1) P: "$\forall x \in \mathbb{R} / x^2 > 0$"
2) P: "$\exists x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 = 0$"
3) P: $x \in [1;2[$
4) P: "$\forall n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$"
5) P: $(\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq \cos x \leq 1$
6) P: $(\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}) : n \prec m$
7) P: $(\exists n \in \mathbb{N})$ $2n+1$ est pair
8) P: $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$
9) P: $(\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : y - x > 0$
10) P: $(\exists! x \in \mathbb{R}); 2x + 4 = 0$
11) P: $(\exists! x \in \mathbb{R}); x^2 = 2$
12) P: $(\exists x \in \mathbb{Z}); \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$
13) P: $(\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : y^2 = x$

Solution :

1) $\overline{P}$: "$\exists x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 0$" et on a P: est fausse
2) $\overline{P}$ "$\forall x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 \neq 0$" et on a P: est vraie
3) $\overline{P}$: $x \notin [1;2[$
4) $\overline{P}$ $\exists n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$" et on a P: est fausse
5) $\overline{P}$ $(\exists x \in \mathbb{R}); \cos x \succ 1$ ou $\cos x \prec -1$ et on a P: est vraie
6) $\overline{P}$ $(\exists n \in \mathbb{N}); (\forall m \in \mathbb{N}) : n \geq m$ et on a P: est vraie
7) $\overline{P}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $2n+1$ est impair P: est fausse
8) $\overline{P}$ $(\exists n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ et on a P: est vraie

$\overline{P}$ 9) $(\exists x \in \mathbb{R}); (\forall y \in \mathbb{R}) : y - x \leq 0$ et on a P: est fausse

10) P: $(\exists! x \in \mathbb{R}); 2x + 4 = 0$ on a P: est vraie
11) P: $(\exists! x \in \mathbb{R}); x^2 = 2$ on a P: est fausse
12) $\overline{P}$ $(\forall x \in \mathbb{Z}); \frac{x}{4} \notin \mathbb{Z}$ et on a P: est vraie
13) $\overline{P}$ $(\exists x \in \mathbb{R}); (\forall y \in \mathbb{R}) : y^2 = x$ et on a P: est fausse

Exercice 2 Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.

6; Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Solution :

1. "$\forall x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 0$"
2. "$\exists x \in \mathbb{R}, x \succ x^2$ "
3. $(\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}) : n \prec m$
4. $(\exists x \in \mathbb{R}) : (\forall n \in \mathbb{Z}); (\forall m \in \mathbb{N}^*) : x \neq \frac{n}{m}$
5. $(\exists n \in \mathbb{N}); (\forall m \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) : n = m \times k$
6. $(\forall x \in \mathbb{R}); (\forall y \in \mathbb{R}) / x \prec y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} / x \prec z \prec y$

Exercice 3 : $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $\begin{cases} 0 \leq x \prec 2 \\ 0 \leq y \prec 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ 1$

Solution : $\begin{cases} 0 \leq x \prec 2 \\ 0 \leq y \prec 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \succ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} \succ \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ 1$

Exercice 4 : $x \in \mathbb{R}^+$ Montrer que :

$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$

Solution : $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow (1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) = 1$

$\Rightarrow 1 + (\sqrt{x})^2 = 1 \Rightarrow 1 + x = 1 \Rightarrow x = 0$

Exercice 5 : 1) Montrer que :

$(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2) : a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$

2) $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ Montrer que:

$x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

Solution : 1) $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = -b^2 \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^-$

Or on sait que $a^2 \in \mathbb{R}^+$ donc $a^2 \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-$ donc $a^2 = 0$ donc $a = 0$

Et puisque $a^2 + b^2 = 0$ alors $b = 0$

2)

$x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 + y - 2\sqrt{y} + 1 = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = 0$ et $\sqrt{y} - 1 = 0$ d'apres1)

$\Rightarrow \sqrt{x} = 1$ et $\sqrt{y} = 1 \Rightarrow x = 1$ et $y = 1$

Donc : $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

Exercice 6 : Montrer que :

$\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right): a^2+b^2=1 \Rightarrow |a+b|\leq\sqrt{2}$

Solution : 1)supposons que : $a^2+b^2=1$

Or on sait que $\forall(a;b)\in\mathbb{R}:(a-b)^2\geq 0$

Donc : $a^2-2ab+b^2\geq 0$ et puisque : $a^2+b^2=1$ alors : $1-2ab\geq 0$ Donc $2ab\leq 1$ et $a^2+b^2=1$

Par suite : $a^2+b^2+2ab\leq 2$ donc $(a+b)^2\leq 2$

donc $\sqrt{(a+b)^2}\leq\sqrt{2}$ donc $|a+b|\leq\sqrt{2}$

Or on sait que $a^2\in\mathbb{R}^+$ donc $a^2\in\mathbb{R}^+\cap\mathbb{R}^-$ donc $a^2=0$ donc $a=0$

Et puisque $a^2+b^2=0$ alors $b=0$

2)

$x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x-2\sqrt{x}+1+y-2\sqrt{y}+1=0$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y}-1\right)^2=0\Rightarrow\sqrt{x}-1=0$ et $\sqrt{y}-1=0$

d'apres1)$\Rightarrow\sqrt{x}=1$ et $\sqrt{y}=1\Rightarrow x=1$ et $y=1$

Donc : $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$

Exercice 7 : Montrer que si $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$ alors $a+b\in\mathbb{Q}$

Solution : Prenons $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.

Alors $a=\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$; De même $b=\frac{p'}{q'}$ avec $p'\in\mathbb{Z}$ et $q'\in\mathbb{N}^*$ donc

$a+b=\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=\frac{p\times q'+q\times p'}{q\times q'}$. Or le numérateur $p\times q'+q\times p'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur $q\times q'$ est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b=\frac{p''}{q''}$ avec $p''\in\mathbb{Z}$ et $q''\in\mathbb{N}^*$ Ainsi $a+b\in\mathbb{Q}$

Exercice 8 : on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par :

$f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$ Montrer que :

$|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\leq|f(x)-f(1)|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

Solution : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}\prec x-1\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\prec x\prec\frac{3}{2}$

On a : $f(x)-f(1)=\frac{x+2}{2x+1}-1=\frac{x+2-2x-1}{2x+1}=\frac{1-x}{2x+1}$

Donc : $|f(x)-f(1)|=\left|\frac{1-x}{2x+1}\right|=|1-x|\times\frac{1}{|2x+1|}$

Et on a : $|x-1|\prec\Rightarrow\frac{1}{2}\prec x\prec\frac{3}{2}\Rightarrow 2\prec 2x+1\prec 4$

$\Rightarrow\frac{1}{4}\prec\frac{1}{|2x+1|}\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\leq|f(x)-f(1)|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

Donc : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\leq|f(x)-f(1)|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

Exercice 9 : Montrer que : $n\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$

Solution :

On a : $n\in\mathbb{N}$ donc $n+1\prec n+2$

donc $0\prec\frac{n+1}{n+2}\prec 1$ donc $\frac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$

Exercice 10 : Montrer que pour tout

$\forall x\in[-2;2]: 2\sqrt{2}\succ\sqrt{4-x^2}$.

Solution : l'inéquation est définie ssi voici le tableau de signe :

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$4-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$D_I=[-2;2]$

Soit $x\in[-2;2]$.

$2\sqrt{2}-\sqrt{4-x^2}=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}=\frac{8-4+x^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}$

$2\sqrt{2}-\sqrt{4-x^2}=\frac{4+x^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}\succ 0$

donc $\forall x\in[-2;2]: 2\sqrt{2}\succ\sqrt{4-x^2}$

Exercice 11: Montrer que pour tout

$\forall x\in\mathbb{R}: |x-1|\leq x^2-x+1$.

Solution : Soit $x\in\mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : x >1 Alors|x−1|= x−1.

Calculons alors $(x^2-x+1)-(x-1)=x^2-x+1-x+1$

$(x^2-x+1)-(x-1)=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1\geq 0$ Ainsi $x^2-x+1\geq|x-1|$

Deuxième cas : x < 1. Alors|x−1|=−(x−1).

Nous obtenons

$(x^2-x+1)+(x-1)=x^2-x+1+x-1=x^2\geq 0$.

Et donc $x^2-x+1\geq|x-1|$

Conclusion : Dans tous les cas $x^2-x+1\geq|x-1|$.

Exercice 12 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E) :

$1-\frac{x}{4} \succ \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (E)

et $x \in \left]-1;+\infty\right[$ **on a :** $x \in S \Leftrightarrow \frac{4-x}{4} \succ \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

1 cas : si $x \in \left[4;+\infty\right[$ alors $4-x \le 0$ donc $S=\varnothing$

2 cas : si $x \in \left]-1;4\right[$ alors $4-x \ge 0$ donc

$\frac{4-x}{4} \succ \frac{1}{\sqrt{1+x}} \Leftrightarrow \left(\frac{4-x}{4}\right)^2 \succ \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2 \Leftrightarrow x\left(x^2-7x+8\right) \succ 0$

$\Leftrightarrow x \in \left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$ donc $S_2=\left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$

Donc $S=S_1 \cup S_2=\left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$

Exercice 13 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1) :

$|x-1|+2x-3 \ge 0$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (1)

soit $x \in \mathbb{R}$ **:** on va déterminer le signe de : $x-1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

si $x \in \left[1;+\infty\right[$ alors $|x-1|=x-1$

donc l'inéquation (1) devient :

$x-1+2x-3 \ge 0 \Leftrightarrow 3x-4 \ge 0$

$3x-4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{4}{3}$ donc :

$S_1=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[\cap \left[1;+\infty\right[=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

si $x \in \left]-\infty;1\right]$ alors $|x-1|=-(x-1)=-x+1$

donc l'inéquation (1) devient :

$-x+1+2x-3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2$

donc $S_2=\left[2;+\infty\right[\cap \left]-\infty;1\right]=\varnothing$

finalement : $S=S_1 \cup S_2=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Exercice 14 : Montrer que pour tout

$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}+x \succ 0$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

<u>Premier cas :</u> $x \ge 0$ Alors $x^2 \ge 0$ donc $x^2+1 \ge 1 \succ 0$

donc $\sqrt{x^2+1} \succ 0$ et on a $x \ge 0$ donc $\sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

<u>Deuxième cas :</u> $x \le 0$. on a $x^2+1 \succ x^2$

donc $\sqrt{x^2+1} \succ \sqrt{x^2}$ donc $\sqrt{x^2+1} \succ |x|$ or $x \le 0$

alors on a : $\sqrt{x^2+1} \succ -x$ donc $\sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

finalement : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

Exercice 15 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1) :

$x^2-|x-2|+5=0$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (1)

soit $x \in \mathbb{R}$ **:** étudions le signe de : $x-2$

<u>Premier cas :</u> si $x \in \left[2;+\infty\right[$ alors $|x-2|=x-2$

donc l'équation (1) devient :

$x^2-(x-2)+5=0 \Leftrightarrow x^2-x+7=0$

$\Delta=1-28=-27 \prec 0$ donc : $S_1=\varnothing$

<u>Deuxième cas :</u> si $x \in \left]-\infty;2\right[$ alors

$|x-2|=-(x-2)=-x+2$

donc l'équation (1) devient :

$x^2+(x-2)+5=0 \Leftrightarrow x^2+x+3=0$

$\Delta=1-12=-11 \prec 0$ donc $S_2=\varnothing$

finalement : $S=S_1 \cup S_2=\varnothing$

Exercice 16 : Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : soit $n \in \mathbb{N}$ on a 3 cas possibles seulement pour n

$n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$

<u>1cas :</u> $n=3k$

$n(n+1)(n+2)=3k(3k+1)(3k+2)=3k'$ Avec

$k'=k(3k+1)(3k+2)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

<u>2cas :</u> $n=3k+1$

$n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+2)(3k+3)$

$n(n+1)(n+2)=3(3k+1)(3k+2)(k+1)=3k'$

Avec $k'=(3k+1)(3k+2)(k+1)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

<u>3cas :</u> $n=3k+2$

$n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+3)(3k+4)=3(3k+2)(k+1)(3k+4)=3k'$

Avec $k'=(3k+2)(k+1)(3k+4)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Exercice 17 : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $x\neq 2$ et $y\neq 2\Rightarrow 2x+2y-xy-2\neq 2$

Solution : soit $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $2x+2y-xy-2=2\Rightarrow x=2$ ou $y=2$

On a : $2x+2y-xy-2=2\Rightarrow 2x+2y-xy-4=0$

$\Rightarrow x(2-y)-2(2-y)=0\Rightarrow(2-y)(x-2)=0$

$\Rightarrow 2-y=0$ ou $x-2=0\Rightarrow y=2$ ou $x=2$

Donc : $x\neq 2$ et $y\neq 2\Rightarrow 2x+2y-xy-2\neq 2$

Exercice 18 : $x\in\mathbb{R}$ et $x\neq -5$

Montrer que : $x\neq -8\Rightarrow \dfrac{x+2}{x+5}\neq 2$

Solution : soit $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : : $\dfrac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x=-8$

On a : $\dfrac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x+2=2(x+5)$

$\Rightarrow x+2=2x+10\Rightarrow x=-8$

Donc : $x\neq -8\Rightarrow \dfrac{x+2}{x+5}\neq 2$

Exercice 19 : Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Solution : Nous supposons que n n'est pas pair

Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair

Comme n n'est pas pair il est impair et donc il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$.

Alors $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$ avec $k'=2k^2+2k\in\mathbb{N}$.

Et donc n^2 est impair.

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 20 : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow x=y$??

On a : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow$

$xy-x+y-1=xy+x-y-1$

$\Rightarrow -2x=-2y\Rightarrow x=y$

Donc : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

Exercice 21 : Soit $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$

Montrer que $n\times p$ est pair ou n^2-p^2 est un multiple de 8 .

Solution :

- Si n ou p sont pairs alors $n\times p$ est pair
- Si n ou p sont impairs alors

$n=2k+1$ et $p=2k'+1$ avec $k\in\mathbb{N};k'\in\mathbb{N}$

Donc $n^2-p^2=(2k+1)^2-(2k'+1)^2$

$n^2-p^2==4\left(k(k+1)-k'(k'+1)\right)$ et on a : $m(m+1)$ est pair

$n^2-p^2=4(2\alpha-2\beta)=8(\alpha-\beta)=8k''$ donc n^2-p^2 est un multiple de 8 .

Exercice 22 : Soient $a\succ 0$ et $b\succ 0$ Montrer que si $\dfrac{a}{1+b}=\dfrac{b}{1+a}$ alors a = b.

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\dfrac{a}{1+b}=\dfrac{b}{1+a}$ et $a\neq b$.

Comme $\dfrac{a}{1+b}=\dfrac{b}{1+a}$ alors $a(1+a)=b(1+b)$ donc $a+a^2=b+b^2$ d'où $a^2-b^2=b-a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b)=-(a-b)$ Comme $a\neq b$ alors $a-b\neq 0$ et donc en divisant par a−b on obtient :

a+ b =−1. La somme des deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion : si $\dfrac{a}{1+b}=\dfrac{b}{1+a}$ alors a = b.

Exercice 23 : Soit f la fonction numérique définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq M$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq M$

$f(x)\leq M\Rightarrow x^2+2x\leq M\Rightarrow x^2+2x+1\leq M+1$

$\Rightarrow(x+1)^2\leq M+1\Rightarrow\sqrt{(x+1)^2}\leq\sqrt{M+1}\Rightarrow$

$|x+1|\leq\sqrt{M+1}$

$\Rightarrow -\sqrt{M+1}\leq x+1\leq\sqrt{M+1}\Rightarrow$

$-\sqrt{M+1}-1\leq x\leq\sqrt{M+1}-1\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Nous obtenons une contradiction car il suffit de prendre : $x=\sqrt{M+1}$

Donc notre supposition est fausse donc : il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\le M$

Exercice 24 : Montrer que : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

Donc il existe $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$; tel que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec

$a\wedge b=1$

$\sqrt{2}=\frac{a}{b}\Rightarrow a=b\sqrt{2}\Rightarrow a^2=\left(b\sqrt{2}\right)^2$

$\Rightarrow a^2=2b^2\Rightarrow a^2$ est pair $\Rightarrow a$ est pair

Et on a : $\sqrt{2}=\frac{a}{b}\Rightarrow a^2=2b^2\Rightarrow 4k^2=2b^2\Rightarrow$

$2k^2=b^2$

$\Rightarrow b^2$ est pair $\Rightarrow b$ est pair

Donc on a : $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec a est pair et b est pair

Cad : $a\wedge b\neq 1$ Nous obtenons une contradiction

Donc notre supposition est fausse donc $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Exercice 25 : (Contraposée ou absurde)

Soient $a;b\in\mathbb{Q}$

1)Montrer que : $a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow a=b=0$

2)en déduire que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}\Rightarrow a=a'$ et $b=b'$

Solution :1) Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $b\neq 0$

$a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow b\sqrt{2}=-a\Rightarrow -\frac{a}{b}=\sqrt{2}$

Or $a;b\in\mathbb{Q}$ donc $-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ mais on sait que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Nous obtenons donc une contradiction

Donc $b=0$ et puisque : $a+b\sqrt{2}=0$ alors $a=0$

2) supposons que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}$ donc

$a-a'+b\sqrt{2}-b'\sqrt{2}=0$

donc $a-a'+\sqrt{2}(b-b')=0$ et d'après **1) on aura :**

$a-a'=0$ et $b-b'=0$

donc $a=a'$ et $b=b'$

Exercice 26 : (absurde)

On considère l'ensemble : $A=\{1;2;3;4;...;n\}$ avec n un nombre entier impair

Et soient x_1 ; x_2; x_3; x_4 ;… ; x_n des éléments de l'ensemble A distincts deux a deux

Montrer que : $\exists i\in A/\ \ x_i-i$ est pair

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que :

$\forall i\in A/\ \ x_i-i$ est impair

On a donc :

$S=(x_1-1)+(x_2-2)+(x_3-3)+...+(x_n-n)$ un nombre entier impair

Car c'est la somme d'un nombre impair de nombres impairs

Or :

$S=(x_1+x_2+x_3+...+x_n)-(1+2+3+...+n)=0$

est 0 est pair

Nous obtenons donc une contradiction donc :

$\exists i\in A/\ \ x_i-i$ est pair

Exercice 27 : Montrer que La proposition $P:(\forall x\in[0;1]):x^2\ge x$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\ni x\in[0;1]):x^2\prec x$

On posant : $x=\frac{1}{2}$ on aura : $\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec\frac{1}{2}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice 28 : Montrer que La proposition $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x^2+y^2\ge x+y$ est fausse :

Solution : sa négation est :

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):x^2+y^2\prec x+y$

On posant : $x=1$ et $y=\frac{1}{2}$ on aura : $1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec 1+\frac{1}{2}$

c a d $\frac{5}{4}\prec\frac{6}{4}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice 29 : Montrer que La proposition $P:(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2):\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ est fausse :

Solution : sa négation est :

$\overline{P}:(\exists(a;b)\in\mathbb{R}^2):\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$

On posant : $a=4$ et $b=3$ on aura :

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ et $a+b=4+3=7$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice 30 : Montrer que La proposition suivante est fausse :

« Tout entier positif est somme de trois carrés »

(Les carrés sont les 0^2, 1^2, 2^2, 3^2,... Par exemple $6=1^2+1^2+2^2$.)

Démonstration. Un contre exemples : les carrés inférieurs à7 sont 0,1,4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

Exercice 31 : Montrer que La proposition $P:(\forall x\in\mathbb{R}^*):x+\frac{1}{x}\ge 2$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:\left(\exists x\in\mathbb{R}^*\right):x+\frac{1}{x}\prec 2$

On posant : $x=-1$ on aura : $-1+\frac{1}{-1}=-2\prec 2$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice 32 : on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=2x^2-x+3$ Montrer que : f n'est ni pair ni impair

Solution : f est n'est pas pair ssi $(\exists x\in\mathbb{R}):f(-x)\neq f(x)$

f est n'est pas impair ssi $(\exists x\in\mathbb{R}):f(-x)\neq -f(x)$

On a en effet : $f(1)=4$ et $f(-1)=6$ donc

$f(-1)\neq -f(1)$ et $f(-1)\neq f(1)$

Donc f n'est ni pair ni impair

Exercice 33 : Montrer que La proposition

$P:\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\ c\neq d\end{cases}\Rightarrow a+c\neq b+d$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:\exists(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\ c\neq d\end{cases}$ et $a+c=b+d$

On a : $2\neq 3$ et $1\neq 0$ et $2+1=3+0$

donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice 34 : Montrer que La proposition

$P:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):x^2-xy+y^2=0$ est fausse

Solution : sa négation est :

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x^2-xy+y^2\neq 0$

On posant : $x=1$ on aura : $1-y+y^2$ c a d y^2-y+1

$\Delta=(-1)^2-4=-3\prec 0$ donc : $y^2-y+1\succ 0$ donc : $y^2-y+1\neq 0$

donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice 35 : $\forall x>0\quad x+\frac{1}{x}\geq 2$

Solution : $x+\frac{1}{x}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}\geq 2$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}-2\geq 0\Leftrightarrow\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$

et puisque on a : $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ donc $\forall x>0\quad x+\frac{1}{x}\geq 2$

Exercice 36 : soit $x\in\mathbb{R}$ Montrer que :

$|x-1|\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\leq\frac{1}{x+1}\leq\frac{2}{3}$

Solution :

$|x-1|\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\leq x-1\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}+2\leq x-1+2\leq\frac{1}{2}+2$

$\Leftrightarrow\frac{3}{2}\leq x+1\leq\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\leq\frac{1}{x+1}\leq\frac{2}{3}$

Exercice 37 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :

$\sqrt{x^2+1}=2x$

soit S l'ensemble des solution de l'équation (E)

Solution :

Methode1 : $x\in S\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=2x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}^2=(2x)^2$

$\Rightarrow x^2+1=4x^2\Rightarrow 3x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}\, ou x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Remarque : on ne peut pas affirmer que :

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ sont les solutions de l'équation

Et inversement on a : $\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\neq-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Donc : $-\frac{\sqrt{3}}{3}\notin S$ et on a : $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Methode2 : $x\in S\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=2x$ et $x\geq 0\Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+1}^2=(2x)^2$

$\Leftrightarrow x^2+1=4x^2$ et $x\geq 0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}$ et $x\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(x=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ ou }x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et $x\geq 0$

Donc : $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Exercice 38 : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $|x-y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Solution : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$|x-y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}\Leftrightarrow|x-y|^2\leq\left(2\sqrt{x^2+y^2+xy}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\leq 4x^2+4y^2+4xy$

$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+6xy\geq 0$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2+2xy+y^2\right)\geq 0\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2\geq 0$

$\Leftrightarrow(x+y)^2\geq 0$

On sait que $(x+y)^2\geq 0$ (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$: $|x-y|\le 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Exercice 39 : 1) Montrer que :

$\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right): a+b=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ Montrer que:

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$

Solution : 1)a) $\Rightarrow:\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right): a+b=0 \Rightarrow a=0$ et $b=0$

Supposons que ; $a+b=0$ et ($a\neq 0$ ou $b\neq 0$) et $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2$

Donc $a+b\succ 0$ contradiction par suite $a=0$ et $b=0$

b) $\Leftarrow$ inversement si $a=0$ et $b=0$ alors on aura $a+b=0$

donc : $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right): a+b=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}-2=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)+\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)=0$ or $\sqrt{x^2+1}-1\ge 0$ et $\sqrt{y^2+1}-1\ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-1=0$ et $\sqrt{y^2+1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=1$ et $\sqrt{y^2+1}=1$

$\Leftrightarrow x^2+1=1$ et $y^2+1=1 \Leftrightarrow x^2=0$ et $y^2=0 \Leftrightarrow x=0$ et $y=0$

Donc : $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$

Exercice 40 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};3^n\ge 1+2n$.

Solution : notons P(n) La proposition suivante : $\forall n\in\mathbb{N};3^n\ge 1+2n$. Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $3^0\ge 1+2\times 0$ donc $1\ge 1$.

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence :

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $3^n\ge 1+2n$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $3^{n+1}\ge 1+2(n+1)$?? c'est-à-dire

Montrons que $3^{n+1}\ge 2n+3$??

On a : $3^n\ge 1+2n$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $3^n\times 3\ge 3\times(1+2n)$

donc : $3^{n+1}\ge 6n+3$

Or on remarque que : $6n+3\ge 2n+3$ (on pourra faire la différence $(6n+3)-(2n+3)=4n\ge 0$)

donc : on a $6n+3\ge 2n+3$ et $3^{n+1}\ge 6n+3$ donc $3^{n+1}\ge 2n+3$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout n > 0, c'est-à-dire $\forall n\in\mathbb{N};3^n\ge 1+2n$.

Exercice 41 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$.

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1=\frac{1\times(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$ donc $1=1$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que :

$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$??

On a : $1+2+3+...+n+(n+1)=(1+2+3+...+n)+(n+1)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence:

$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$

donc

$$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n\times(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N}^*;1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

Exercice 42 : Montrer par récurrence que :pour tout entier $n\ge 5$: $2^n\ge 6n$

Solution : notons P(n) La proposition : « $2^n\ge 6n$ »

1étapes : Initialisation : Pour $n=5: 2^5=32$ et $6\times 5=30$ donc $2^5\ge 6\times 5$

Donc P(5) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $2^n\ge 6n$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $2^{n+1}\geq 6(n+1)$??

Or, puisque $2^n\geq 6n$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

Donc : $2^n\times 2\geq 6n\times 2$ donc $2^{n+1}\geq 12n$ **(1)**

Or on remarque que : $12n\geq 6(n+1)$ **(2)**

En effet : $12n-6(n+1)=6n-6\geq 0$

Car : $n\geq 5$ donc $6n\geq 30$ donc $6n-6\geq 24\geq 0$

On conclut par récurrence que : Pour tout $n\geq 5$:

$2^n\geq 6n$

Exercice 43 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}; n^3+2n$ est divisible par 3

Solution : montrons $\exists k\in\mathbb{N} / n^3+2n=3k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons

$0^3+2\times 0=0$ est un multiple de3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N} / n^3+2n=3k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que :

$\exists k'\in\mathbb{N} / (n+1)^3+2(n+1)=3k'$??

$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=$

$=(n^3+2n)+3n^2+3n+3=3k+3(n^2+n+1)=3(k+n^2+n+1)$

$=3(k+n^2+n+1)=3k'$ avec $k'=k+n^2+n+1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N}; n^3+2n$ est divisible par 3

Exercice 44 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}.$$

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons

$1^2=\frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6}=\frac{1\times 2\times 3}{6}=1$

donc $1=1$. Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que :

$1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$??

On a : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=(1^2+2^2+3^2+...+n^2)+(n+1)^2$

et on a : $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

$1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right)$

$=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$

Et on remarque que : $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

Donc : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

Exercice 45 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}.$$

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons

$1^3=\frac{1^2\times(1+1)^2}{4}=1$

donc $1=1$. Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que :

$\sum_{k=1}^{n+1}k^3=\frac{(n+1)^2\times(n+2)^2}{4}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$??

On a : $\sum_{k=1}^{n+1}k^3=\sum_{k=1}^{n}k^3+(n+1)^3$

et on a : $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

$\sum_{k=1}^{n+1}k^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)=(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$

$$=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{2^2}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 46 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2.$$

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1+3=4$ et $(1+1)^2=4$ donc $4=4$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=(n+1)^2$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que :

$$\sum_{k=1}^{k=n+1}(2k+1)=1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(n+2)^2$$

??

On a : $\sum_{k=1}^{k=n+1}(2k+1)=\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)+(2n+3)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence:

$$\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=(n+1)^2$$

donc

$$\sum_{k=1}^{k=n+1}(2k+1)=(n+1)^2+(2n+3)=n^2+2n+1+2n+3=n^2+4n+4$$

donc $\sum_{k=1}^{k=n+1}(2k+1)=(n+2)^2$ donc P(n+1) est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence on a :

$$\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=(n+1)^2\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$$

Exercice 47 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};4^n+6n-1$ est divisible par 9

Solution :montrons que : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,4^n+6n-1=9k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $4^0+6\times 0-1=0$ est un multiple de 9

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,4^n+6n-1=9k$ donc $4^n=9k-6n+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que :

$\exists k'\in\mathbb{N}\,/\,4^{n+1}+6(n+1)-1=9k'$??

$$4^{n+1}+6(n+1)-1=4\times 4^n+6n+6-1$$

$$=4\times(9k-6n+1)+6n+6-1=36k+4-24n+6n+6-1$$

$$=36k+9-18n=9(4k+1-2n)=9k'$$

avec $k'=4k+1-2n$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N};4^n+6n-1$ est divisible par 9

Exercice 48 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};7^n-1$ est divisible par 6

Solution : 1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $7^0-1=0$ est un multiple de 6

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,7^n-1=6k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}\,/\,7^{n+1}-1=6k'$??

$$7^{n+1}-1=7\times 7^n-1=7^n\times(6+1)-1=6\times 7^n+7^n-1=6\times 7^n+6k$$

$7^{n+1}-1=6(7^n+k)=6k'$ avec $k'=7^n+k$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N};7^n-1$ est divisible par 6

Erreur classique dans les récurrences

Exercice 49 : Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :

P (n) : 10^n-1est divisible par 9

Q (n) : 10n + 1 est divisible par 9

1) Démontrer que si P (n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.

2) Démontrer que si Q (n) est vraie alors Q (n + 1) est vraie.

3) Un élève affirme : " Donc P (n) et Q (n) sont vraies pour tout entier naturel n.

Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.

4) Démontrer que P (n) est vraie pour tout entier naturel n.

5) Démontrer que Q (n) est fausse pour tout entier naturel n.

On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Exercice 50 : Soit P(n) la propriété dénie sur $\mathbb{N}$ par : 7^n-1Est divisible par 3

1) Démontrer que si P(n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.

2) Que peut-on conclure

Exercice 51 : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tel que : $a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[$

Montrer que : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec1$

Solution : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec1\Leftrightarrow\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|\prec1\Leftrightarrow|a+b|\prec|1+ab|$

$\Leftrightarrow|a+b|^2\prec|1+ab|^2\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab\prec1+a^2b^2+2ab$

Donc : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec1\Leftrightarrow\left(a^2-1\right)\left(1-b^2\right)\prec0$

Donc : $a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[\Rightarrow-1\prec a\prec1$ et $-1\prec b\prec1$

$\Rightarrow|a|\prec1$ et $|b|\prec1\Rightarrow a^2\prec1$ et $b^2\prec1\Rightarrow a^2-1\prec0$ et $1-b^2\succ0$

$\Rightarrow\left(a^2-1\right)\left(1-b^2\right)\prec0$

Donc : $a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[\Rightarrow-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec1$

Exercice 52 : Traduisez les propositions suivantes en langage courant puis déterminer sa négation et la valeur de vérité :

1) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\left(\exists y\in\mathbb{R}\right):x>y$

2) $P:\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);\left(\forall y\in\mathbb{R}\right):x>y$

3) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);x^2\geq4\Rightarrow x\geq2$

4) $P:\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);x^2=4$

5) $P:\left(\forall\varepsilon\succ0\right);\left(\exists x\in\left\{1+\dfrac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\,x\prec\varepsilon+10$

Solution :

1)Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x est supérieur strictement a y et $\overline{P}:\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);\left(\forall y\in\mathbb{R}\right):x\leq y$

$P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\left(\exists y\in\mathbb{R}\right):x>y$ Est une proposition vraie car l'lorsque je prends x je peux trouver y il suffit de prendre : $y=x-1$

2) il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ on a x est supérieur strictement a y et $\overline{P}:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\left(\exists y\in\mathbb{R}\right):x\leq y$

P est une proposition fausse car l'lorsque je prends x je peux toujours donner à y la valeur: $y=x+1$

3) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);x^2\geq4\Rightarrow x\geq2$

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ si x^2 est supérieur ou égal à 4 alors x est supérieur ou égal à 2

$\overline{P}:\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);x^2\geq4$ et $x\prec2$

P est une proposition fausse car l'lorsque je prends $x=-2$ on a $\left(-2\right)^2\geq4$ et $-2\prec2$

4) $P:\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);x^2=4$

il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x^2 est égal à 4

$\overline{P}:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);x^2\neq4$

P une proposition vraie car il suffit de prendre : $x=2$

5) $P:\left(\forall\varepsilon\succ0\right);\left(\exists x\in\left\{1+\dfrac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\,x\prec\varepsilon+10$

Pour tout ε supérieur strictement a 0 il existe au moins un x qui s'écrit sous la forme $1+\dfrac{1}{n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ tel que x est inferieur strictement a $\varepsilon+10$

$\overline{P}:\left(\exists\varepsilon\succ0\right);\left(\forall x\in\left\{1+\dfrac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\,x\geq\varepsilon+10$

Soit $\varepsilon\succ0$

$x\prec\varepsilon+10\Leftrightarrow1+\dfrac{1}{n}\prec\varepsilon+10\Leftrightarrow\dfrac{1}{n}\prec\varepsilon+9\Leftrightarrow n\succ\dfrac{1}{\varepsilon+9}$

Donc pour $n=E\left(\dfrac{1}{\varepsilon+9}\right)+1$ on prend $x=1+\dfrac{1}{n}$ et on a $x\prec\varepsilon+10$

P Est donc une proposition vraie

Exercice 53 : A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si la formules $P\,ou\,\overline{P}$ est une tautologies.

Solution :

P	$\overline{P}$	$P\,ou\,\overline{P}$
0	1	1
1	0	1

Exercice 54 : 1. (Raisonnement direct) Soient $a\in\mathbb{R}^+;b\in\mathbb{R}^+$

Montrer que si $a\leq b$ alors $a\leq\dfrac{a+b}{2}\leq b$ et $0\leq\sqrt{ab}\leq b$

2. (Cas par cas) Montrer que pour tout $\forall n\in\mathbb{N};n\left(n+1\right)$ est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).

4. (Absurde) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $x<2\Rightarrow x^2<4$?

6. (Récurrence) Fixons un réel $a\in\mathbb{R}^{+*}$

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};\left(1+a\right)^n\geq1+n\times a$.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien